Matemáticas B. – 4º E.S.O.

Examen de la 3ª evaluación.

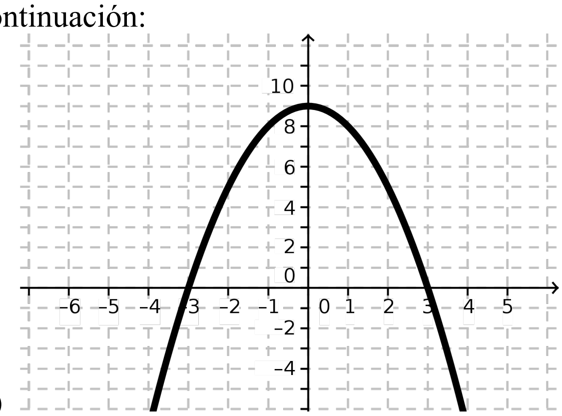
1. (2 puntos) Dados los puntos A=(1, – 2) , B=(3, 7) y C=(6, 1)
   a) Halla la recta que pasa por A y C.
   b) Halla la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por B.
   c) Determina la posición relativa (y el punto de corte si lo hubiera) de la recta hallada en a) y la de ecuación $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{7}$.

2. (2 puntos) Halla el dominio de las funciones y sus puntos de corte con los ejes :
   a) $f(x)=\dfrac{2x-4}{4x^2-13x+3}$ b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{9-x^2}{x-1}}$

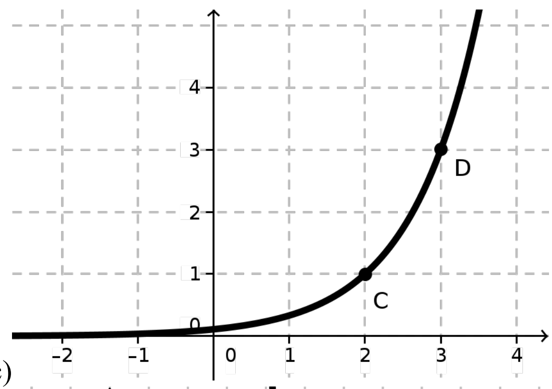
3. (2 puntos) Representa la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3x-5 & \text{si } x\leq 2 \\ \dfrac{-x+20}{2} & \text{si } 2<x<6 \\ 7 & \text{si } x\geq 6 \end{cases}$ señalando el vértice de la parábola, los cortes con los ejes, y los puntos de unión o discontinuidad de los trozos.

4. (2 puntos) Calcula los siguientes logaritmos o simplifica su expresión:
   a) $\log_3 243$ c) $\log x^5-3\log x+\log\sqrt{x}$
   b) $\log_8 4$ d) $\ln\left(\dfrac{e^3}{\sqrt[3]{e}}\right)$

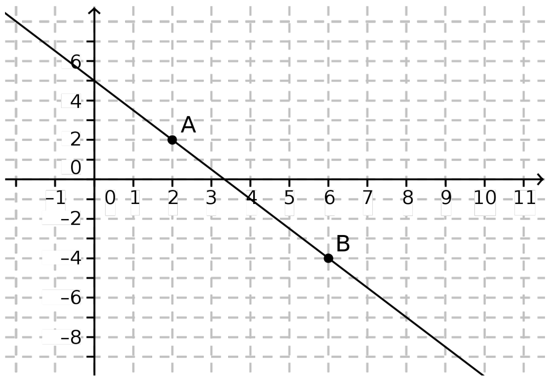
5. (2 puntos) Determina el tipo de función y la fórmula de las gráficas que aparecen a continuación:



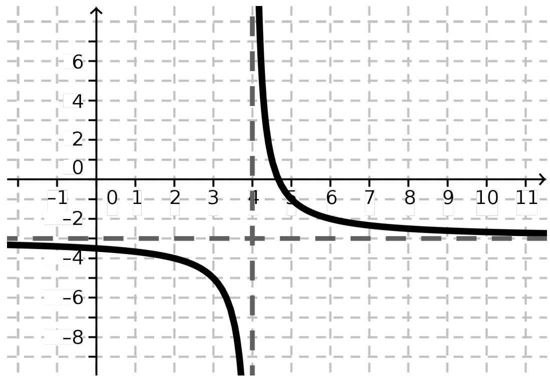
a)



c)



b)



d)

Matemáticas B. – 4º E.S.O.

Soluciones.

1. A=(1, – 2) , B=(3, 7) y C=(6, 1)
   a) Halla la recta que pasa por A y C.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AC}=(6-1,\ 1+2)=(5,\ 3)\\ A(1,-2)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{E. continua}} \boldsymbol{r_{AB}:\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}} \rightarrow 3x-3=5y+10 \xrightarrow{\text{E. general}} \boldsymbol{3x-5y-13=0}$$

   b) Halla la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por B.

Las paralelas a la recta anterior son del tipo $3x-5y+k=0$.

Como la que buscamos contiene al punto B(3, 7), $3\cdot 3-5\cdot 7+k=0 \rightarrow k=26$

Luego la recta buscada es $\boldsymbol{3x-5y+26=0}$

   c) Determina la posición relativa (y el punto de corte si lo hubiera) de la recta hallada en a) y la de ecuación $\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{7} \rightarrow 7x-28=3y-15 \rightarrow 7x-3y-13=0$.

Como los vectores $\overrightarrow{AC}=(5,\ 3)$ y $\vec{v}=(3,\ 7)$ no son proporcionales $\left(\frac{5}{3}\neq\frac{3}{7}\right)$

<u>las rectas son secantes</u>. Se cortan en la solución del sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y-13=0\\ 7x-3y-13=0\end{array}\right\} \xrightarrow[\cdot 5]{\cdot(-3)} \left.\begin{array}{r}-9x+15y+39=0\\ \underline{35x-15y-65=0}\\ 26x\qquad -26=0\end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{26}{26}=1 \rightarrow \left\{\begin{array}{c}x=1\\ 3\cdot 1-5y-13=0\rightarrow y=2\end{array}\right.$$

Las rectas se cortan en el punto $\boldsymbol{P(1,-2)}$

2. Halla el dominio de las funciones y sus puntos de corte con los ejes :
   a) $\boxed{f(x)=\frac{2x-4}{4x^2-13x+3}}$

El denominador no puede ser 0:

No puede ser $4x^2-13x+3=0\rightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{8}=\frac{13\pm 11}{8}=\left\{\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$

Por lo tanto, el dominio son todos los números excepto el 3 y el 1/4 $\Rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{3\ ,\ \frac{1}{4}\right\}$

Corte con eje Y: $A=\left(0,-\frac{4}{3}\right)$

Corte con eje X: $y=f(x)=0\rightarrow 2x-4=0\rightarrow x=2$

Por lo tanto tenemos el punto B=(2, 0)

b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{9-x^2}{x-1}} \underset{\text{identidades notables}}{=} \sqrt{\dfrac{(3+x)(3-x)}{(x-1)}}$

Lo que hay dentro de la raíz debe ser positivo o 0, luego hay que resolver $\dfrac{(3+x)(3-x)}{(x-1)}\geq 0$

Igualando a 0 numerador y denominador obtenemos x = – 3 , x= 3 , x= 1, lo que nos permite hacer la tabla para estudiar, en el resto de valores reales, el signo de toda la fracción a partir del signo de sus factores:

	$-\infty$	– 3 1	3	∞
signo (3 + x)	–	+	+	+
signo (3 – x)	+	–	–	–
signo (x – 1)	–	–	+	+
sgn $\frac{(3+x)(3-x)}{(x-1)}$	$\boxed{+}$	–	$\boxed{+}$	–

Por lo tanto $Dom(g) = \\ =(-\infty\ ,\ -3]\ \cup\ (1\ ,\ 3)$

Corte con eje Y: No hay Cortes con eje X: P=(– 3, 0) Q=(3, 0)

3. Representa la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3x-5 & \text{si } x\leq 2 \\ \dfrac{-x+20}{2} & \text{si } 2<x<6 \\ 7 & \text{si } x\geq 6 \end{cases}$

Primer trozo: (Entre $-\infty$ y 2) Es una parábola.

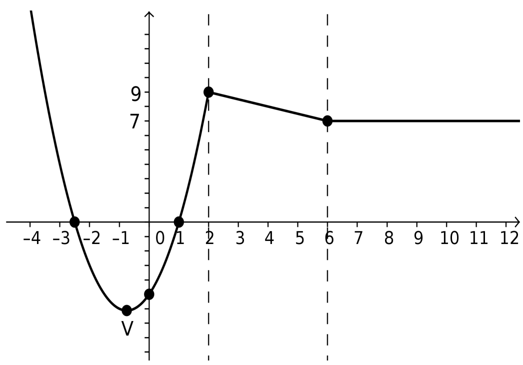
La primera coordenada de su vértice está en $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-3}{4}$. Hallando también los puntos de corte con los ejes y el valor en el extremo derecho del intervalo, obtenemos los valores de la tabla:

x	$y=2x^2+3x-5$	
$\dfrac{-3}{4}$	$\dfrac{-49}{8}$	pues $2\left(\dfrac{-3}{4}\right)^2+3\left(\dfrac{-3}{4}\right)-5=2\cdot\dfrac{9}{16}-\dfrac{9}{4}-5=\dfrac{9}{8}-\dfrac{18}{8}-\dfrac{40}{8}=\dfrac{-49}{8}$ (Vértice)
0	-5	$=2\cdot 0^2+3\cdot 0-5$ (Corte con el eje Y)
1	0	$2x^2+3x-5=0 \rightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\dfrac{-3\pm 7}{4}=\begin{cases} x=1 \\ x=-5/2 \end{cases}$ (con Eje X)
– 2,5	0	
2	9	$=2\cdot 2^2+3\cdot 2-5=8+6-5$ (Extremo derecho)

Segundo trozo: (Entre 2 y 6). Es una recta. Las coordenadas en los extremos del intervalo son

x	$y=\dfrac{-x+20}{2}$
2	9
6	7

(Se une con continuidad con el trozo anterior)



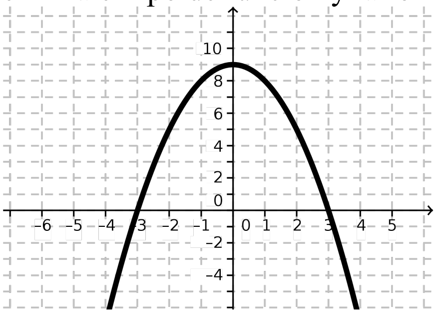
Tercer trozo: (De 6 en adelante)

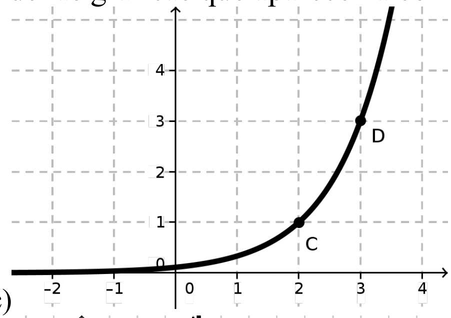
Es una recta horizontal a la altura de 7.

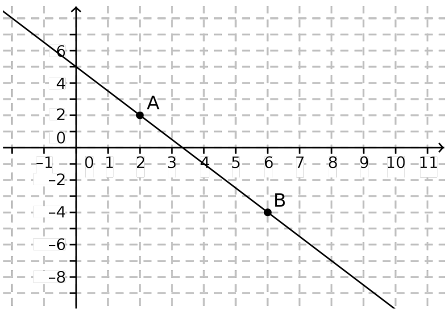
(Es también continua con el trozo anterior)

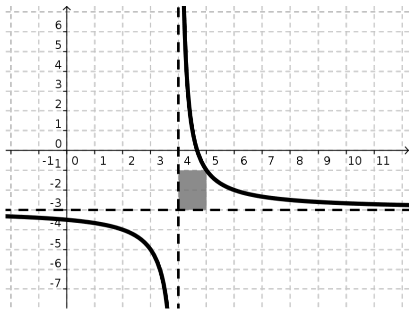
4. Calcula los siguientes logaritmos o simplifica su expresión:
   a) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5\log_3 3 = 5$
   b) $\log_8 4 = x \ \rightarrow\ 8^x = 4 \ \rightarrow\ (2^3)^x = 2^2 \ \rightarrow\ 2^{3x} = 2^2 \ \rightarrow\ 3x = 2 \ \rightarrow\ x = \dfrac{2}{3}$
   c) $\log x^5 - 3\log x + \log\sqrt{x} = 5\log x - 3\log x + \log x^{1/2} = 2\log x - \dfrac{1}{2}\log x = \dfrac{3}{2}\log x$
   d) $\ln\left(\dfrac{e^3}{\sqrt[3]{e}}\right) = \ln e^3 - \ln\sqrt[3]{e} = 3\ln e - \ln e^{1/3} = 3\cdot 1 - \dfrac{1}{3}\ln e = 3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$

5. Determina el tipo de función y la fórmula de las gráficas que aparecen a continuación:

a) 

c) 

b) 

d) 

a) Es una parábola, que corresponde a una función polinómica de segundo grado (o función cuadrática). Como pasa por (– 3, 0) y por (3, 0) podría ser (x+3)·(x–3), pero al ser hacia abajo está multiplicada por un número negativo. En definitiva $f(x) = -1(x+3)(x-3) = -x^2 + 9$

b) Es una recta, que corresponde a una función polinómica de primer grado (o función afín).
$\left.\begin{array}{l} A = (2,\ 2) \\ B = (6, -4) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = (4,\ -6) \ \rightarrow\ m = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2}$ Además, pasa por (0, 5) $\rightarrow\ n = 5$

Así $f(x) = \dfrac{-3}{2}x + 5$

c) Es una función exponencial sobre la recta horizontal y=0, por lo que no hay que sumarle nada.
El punto (0,1) está trasladado dos unidades hacia la derecha $x \rightarrow (x-2)$
Además, el valor siguiente se encuentra a 3 unidades por encima de la recta horizontal: → base = 3.
$f(x) = 3^{(x-2)}$

d) Es una función racional (que proviene de una de proporcionalidad inversa) con una hipérbola por gráfica.
La recta horizontal está 3 unidades por debajo del eje x, por lo que hay que restar 3.
La vertical está sobre el 4, luego el divisor es (x – 4).
Desde el punto de corte de esas asíntotas hasta la hipérbola se puede hacer un rectángulo de lados 1 y 2, (dibujado en gris) luego el numerador de la función de proporcionalidad inversa es k=2.

En definitiva: $f(x) = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{x-4}} \mathbf{-3} \overset{\text{operando}}{=} \dfrac{2-3(x-4)}{x-4} = \dfrac{\mathbf{14-3x}}{\mathbf{x-4}}$