Modelo para la Prueba extraordinaria de Junio de 2015

Con una sola evaluación suspendida, se debe responder a todas las preguntas de esa evaluación.
Con dos o más evaluaciones suspendidas se deben elegir 3 preguntas de cada evaluación, que incluyan al menos un problema con enunciado y un ejercicio de operaciones numéricas o algebraicas.
Cada pregunta correcta se valora 2 puntos, y se califica en proporción a la máxima nota posible.
Para aprobar se debe sacar una calificación igual o superior a 5 en este examen.

1ª evaluación

1. Los autobuses nocturnos de una ciudad salen a las 12 en punto de la noche de la plaza del ayuntamiento, y todas las líneas hacen recorridos circulares, volviendo a la misma plaza. El autobús de la línea 1 hace su recorrido en 36 minutos; el de la línea 2 lo hace en 40 minutos y el de la línea 3 en 45 minutos. ¿Cuándo volverán a coincidir todos en la plaza del ayuntamiento? ¿Cuántos recorridos ha realizado cada autobús hasta ese momento?
2. Opera simplificando las potencias. Expresa el resultado en notación científica, con tres cifras significativas:
   a. $1213{,}5 \cdot 10^{-6} + 0{,}000001 \cdot 10^{4} =$
   b. $\dfrac{16^3 \cdot 50^{-2} \cdot 10^5}{125^{-4} \cdot 8^3 \cdot 25^7} =$
3. Opera simplificando los radicales:
   a. $\left(2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{32}\right) \cdot \sqrt[3]{2^2}$
   b. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
4. Si mis dos perros se comen 15 kg de pienso en 3 semanas, ¿para cuànto tiempo habría comida para 7 perros similares a los míos si compro 120 kg? Responde en semanas y días sueltos, si fuera necesario.
5. El jefe de ventas de una empresa ha decidido repartir 1060 euros entre sus tres mejores vendedores de forma inversamente proporcional al tiempo que han tardado en vender sus lotes de mercancía. El primer vendedor ha tardado 18 días, el segundo 20 y el tercero 24 días en vender sus lotes. ¿Cuánto le tocará a cada uno de los vendedores?

2ª evaluación

6. Factoriza al máximo los siguientes polinomios:
   a. $5x^4 - 30x^3 + 45x^2$
   b. $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$
7. Resuelve la ecuación y la inecuación siguientes expresando el resultado, respectivamente, como números o intervalos:
   a. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
   b. $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{3x-2}{10} \geq x - \dfrac{x+5}{5}$
8. En un triángulo rectángulo, el lado mayor es 3 cm más largo que el mediano, el cual, a su vez, es 3 cm más largo que el pequeño. ¿Cuánto miden los lados?
   (Nota: Puedes usar el teorema de Pitágoras “El cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos”)

9. Resuelve el sistema de forma analítica y gráfica, eligiendo la escala adecuada:

$$\begin{cases} 5x+2y=64 \\ 6x+40=5y \end{cases}$$

10. En un centro escolar hay matriculados 795 estudiantes entre los dos cursos de Bachillerato. El 45% del primero y el 52% del segundo son mujeres, lo que supone un total de 384 alumnas en los dos cursos. ¿Cuántos estudiantes hay en cada curso?

3ª evaluación

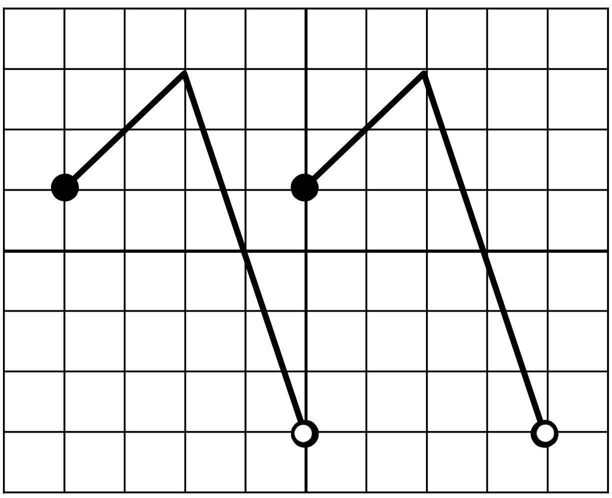
11. Calcula la altura de la pirámide de Cheops sabiendo que un palo de 1,5m proyecta una sombra de 2,14m en el mismo instante en el que la sombra de la pirámide es de 230m. ¿Cuánto medirá en ese momento la sombra de un árbol de 4m?

12. Una escalera de mano de 5m no debe inclinarse menos de 65º ni más de 80º sin un apoyo especial, por razones de seguridad. ¿Qué tramos de altura alcanzará, y a qué distancia hay que poner el pie de la escalera de la pared en que se apoya, si mantenemos esas condiciones?

13. Halla el dominio de las funciones y sus puntos de corte con los ejes (1 punto cada una) :
    a. $f(x)=\dfrac{2x-4}{4x^2-13x+3}$ b. $g(x)=\sqrt{9-x^2}$

14. Dibuja la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+5x-3 & \text{si } x\leq 1 \\ 4 & \text{si } 1<x\leq 3 \\ \dfrac{5x-3}{3} & \text{si } x>3 \end{cases}$ y determina su continuidad, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y sus mínimos relativos.

15. Halla el dominio y el recorrido de la función representada a continuación. Determina (de forma aproximada) sus puntos de corte con los ejes. Describe la continuidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos. Razona si es simétrica o periódica y, en ese caso, de qué tipo.



Modelo para la Prueba extraordinaria - Soluciones

Recuerda que no hay una única manera de resolver los ejercicios de matemáticas. Es posible realizar otras operaciones o razonamientos, o escribir menos o más pasos. En cualquier caso, se debe llegar a los resultados escritos en rojo.

1ª evaluación

1. $mcm(36,40,45)=mcm(2^2\cdot 3^2\ ,\ 2^3\cdot 5\ ,\ 3^2\cdot 5)=2^3\cdot 3^2\cdot 5=360$ $\qquad \frac{360\ \text{min}}{60}=6\ \text{horas}$

$$\frac{360}{36}=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 3^2}=2\cdot 5=10 \qquad \frac{360}{40}=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5}{2^3\cdot 5}=3^2=9 \qquad \frac{360}{36}=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5}{3^2\cdot 5}=2^3=8$$

Los autobuses nocturnos volverán a coincidir a las 6 a.m. en la plaza del ayuntamiento. El autobús de la línea 1 habrá realizado su recorrido diez veces; el de la línea 2 lo habrá hecho nueve veces y el de la línea 3 ocho.

2. Simplificando y expresando el resultado en notación científica con tres cifras significativas

a.
$$1213{,}5\cdot 10^{-6}+0{,}000001\cdot 10^{4} = 1{,}2135\cdot 10^{-3}+1\cdot 10^{-2} =$$
$$= 0{,}12135\cdot 10^{-2}+1\cdot 10^{-2} = 1{,}12135\cdot 10^{-2}\approx 1{,}12\cdot 10^{-2}$$

b.
$$\frac{16^3\cdot 50^{-2}\cdot 10^5}{125^{-4}\cdot 8^3\cdot 25^7} = \frac{(2^4)^3\cdot(2\cdot 5^2)^{-2}\cdot(2\cdot 5)^5}{(5^3)^{-4}\cdot(2^3)^3\cdot(5^2)^7} = \frac{2^{12}\cdot 2^{-2}\cdot 5^{-4}\cdot 2^5\cdot 5^5}{5^{-12}\cdot 2^9\cdot 5^{14}} =$$
$$= \frac{2^{12-2+5}\cdot 5^{-4+5}}{5^{-12+14}\cdot 2^9} = \frac{2^{15}\cdot 5^1}{5^2\cdot 2^9} = 2^{15-9}\cdot 5^{1-2} = 2^6\cdot 5^{-1}=\frac{2^6}{5} = 12{,}8 = 1{,}28\cdot 10^1$$

3. Operando los radicales:

a.
$$\left(2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt[3]{2^2} = \left(2\sqrt{2\cdot 5^2}-3\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^5}\right)\cdot\sqrt[3]{2^2} =$$
$$= \left(10\sqrt{2}-9\sqrt{2}+2^2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{2^2} = (10-9+4)\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2} = 5\cdot\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4} =$$
$$= 5\cdot\sqrt[6]{2^7} = 5\cdot 2\sqrt[6]{2} = 10\sqrt[6]{2}$$

b.
$$\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}\cdot\frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5-3\sqrt{3}}{4-3} = 5-3\sqrt{3}$$

4. Con 120 kg habría comida para 7 perros durante casi 7 semanas (6 semanas y seis días).

inversamente proporcional		
↙	↙ directamente proporcional ↘	↘
perros	kg de pienso	semanas
2	15	3
7	120	x

$$\frac{x}{3}=\frac{2}{7}\cdot\frac{120}{15} \rightarrow x=\frac{2\cdot 120\cdot 3}{7\cdot 15}=\frac{720}{105}=\frac{48}{7} = 6{,}\overline{857142} = 6+\frac{6}{7}$$

5. Al primer vendedor le darán 400 euros, al segundo 360 y al tercero 300.

→	↘	1er vendedor	2º vendedor	3er vendedor	Total
directamente	inversamente	x	y	z	1060
proporcional	proporcional	18	20	24	
→		1/18	1/20	1/24	53/360

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 5}+\frac{1}{2^3\cdot 3}=\frac{2^2\cdot 5+2\cdot 3^2+3\cdot 5}{2^3\cdot 3^2\cdot 5}=\frac{20+18+15}{360}=\frac{53}{360}$$

$$\frac{x}{1/18}=\frac{1060}{53/360}=\frac{1060\cdot 360}{53}=7200 \rightarrow x=\frac{7200\cdot 1}{18}=400$$

$$\frac{y}{1/20}=7200 \rightarrow y=\frac{7200\cdot 1}{20}=360$$

$$\frac{z}{1/24}=7200 \rightarrow z=\frac{7200\cdot 1}{24}=300$$

2ª evaluación

6. Factoriza al máximo los siguientes polinomios:

   a. $5x^4-30x^3+45x^2 \;=\; 5x^2(x^2+6x+9) \;=\; 5x^2\cdot(x+3)^2$

   b. $x^4-7x^3+9x^2+7x-10 \;=\; (x-1)(x-2)(x+1)(x-5)$

Por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -7 & 9 & 7 & -10 \\
1 & & 1 & -6 & 3 & 10 \\
\hline
 & 1 & -6 & 3 & 10 & \underline{0} \\
2 & & 2 & -8 & -10 & \\
\hline
 & 1 & -4 & -5 & \underline{0} & \\
-1 & & -1 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & -5 & \underline{0} & & \\
5 & & 5 & & & \\
\hline
 & 1 & \underline{0} & & &
\end{array}$$

7. Resolviendo:

   a. $4x^4-37x^2+9=0 \xrightarrow[z^2=x^4]{z=x^2} 4z^2-37z+9=0 \rightarrow z=\frac{37\pm\sqrt{1369-144}}{8}=\frac{37\pm 35}{8}$

   $$\rightarrow \begin{cases} z=72/8=9 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 & x=3 \;\;;\;\; x=-3 \\ z=2/8=1/4 \rightarrow x^2=1/4 \rightarrow x=\pm\sqrt{1/4}=\pm 1/2 & x=1/2 \;\;;\;\; x=-1/2 \end{cases}$$

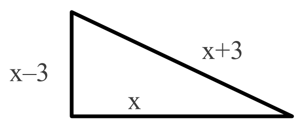
   b.

$$\frac{2x-3}{4}-\frac{3x-2}{10}\geq x-\frac{x+5}{5} \rightarrow \frac{10x-15}{20}-\frac{6x-4}{20}\geq\frac{20x}{20}-\frac{4x+20}{20} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x-15-(6x-4)\geq 20x-(4x+20) \rightarrow 10x-6x-20x+4x\geq 15-4-20 \rightarrow -12x\geq -9 \rightarrow$$

$$\rightarrow x\leq\frac{-9}{-12} \rightarrow x \;\leq\; \frac{3}{4} \qquad\qquad x\in\left(-\infty\,,\,\frac{3}{4}\right]$$

8. Llamando x al lado mediano, los datos quedan como en el dibujo.



Por el Teorema de Pitágoras:

$$(x+3)^2=(x-3)^2+x^2 \rightarrow x^2+6x+9=x^2-6x+9+x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x^2+12x=0 \rightarrow x(-x+12)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (solución no válida)} \\ -x+12=0 \rightarrow x=12 \end{cases}$$

El lado mayor mide 15 cm, el mediano 12 y el menor 9 cm.

9. Resolviendo

a) de manera analítica:

$$\left.\begin{aligned} 5x+2y&=64 \\ 6x+40&=5y \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 5x+2y&=64 \\ 6x-5y&=-40 \end{aligned}\right\}$$

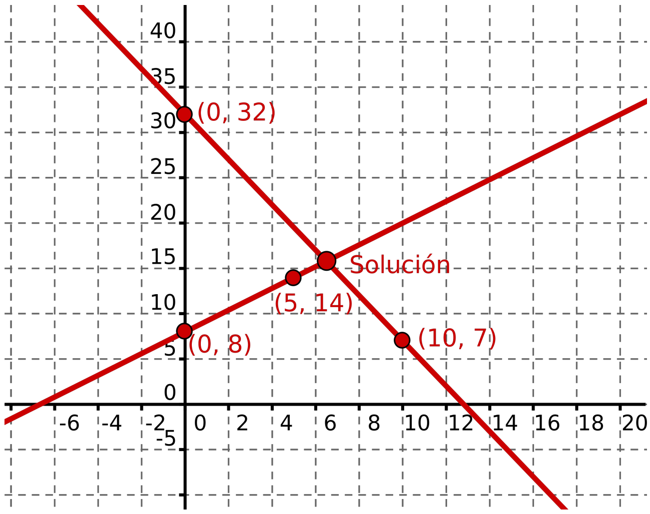
$$\xrightarrow[\cdot 2]{\substack{\text{Reducción} \\ \cdot 5}} \begin{cases} 25x+10y=320 \\ \underline{12x-10y=-80} \\ 37x \qquad =240 \rightarrow x=240/37 \approx 6{,}49 \end{cases} \qquad \xrightarrow[\cdot(-5)]{\cdot 6} \begin{cases} 30x+12y=384 \\ \underline{-30x+25y=200} \\ 37y=580 \rightarrow y=584/37 \approx 15{,}78 \end{cases}$$

b) de manera gráfica:

$$\begin{cases} 5x+2y=64 \\ 6x+40=5y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{64-5x}{2} \\ y=\dfrac{6x+40}{5} \end{cases}$$

x	$y=\frac{-5x+64}{2}$
0	32
10	7

x	$y=\frac{6x+40}{5}$
0	8
5	14



La solución del sistema (punto de corte de las rectas) es

$$\begin{cases} x=240/37 \\ y=580/37 \end{cases} \Rightarrow P=\left(\frac{240}{37}, \frac{580}{37}\right) \approx (6'49 \,,\, 15'78)$$

10. x = Nº de estudiantes en primer curso de Bachillerato. y = Nº de estudiantes en 2º curso.

$$\left.\begin{aligned} x+y=795 &\rightarrow y=795-x \\ 0{,}45x+0{,}52y&=384 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{Sustitución}]{} 0{,}45x+0{,}52(795-x)=384 \rightarrow 0{,}45x+413{,}4-0{,}52y=384 \rightarrow$$

$$\rightarrow -0{,}07x=-29{,}4 \rightarrow x=\frac{-29{,}4}{-0{,}07}=420 \rightarrow \begin{cases} x=420 \\ y=795-420=375 \end{cases}$$

Hay 420 estudiantes matriculados en 1º de Bachillerato y 375 en 2º.

3ª evaluación

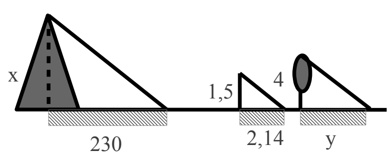
11. Por ser triángulos semejantes los que forman las alturas y las sombras correspondientes

$$\frac{x}{230} = \frac{1{,}5}{2{,}14} \rightarrow x = \frac{230 \cdot 1{,}5}{2{,}14} \approx 161{,}215$$

La altura de la pirámide de Cheops es de más de 160 m.

$$\frac{y}{4} = \frac{2{,}14}{1{,}5} \rightarrow y = \frac{2{,}14 \cdot 4}{1{,}5} \approx 5{,}707$$

La sombra del árbol de 4 metros medirá unos 5,70 m.



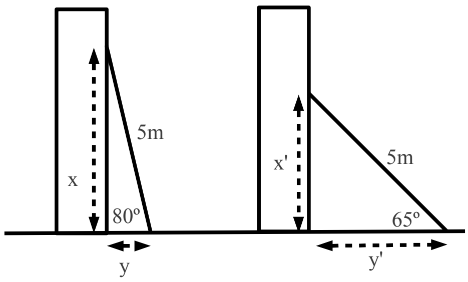
12.

$\text{sen}\,80=\frac{x}{5} \rightarrow x=5\cdot\text{sen}\,80=4{,}924$

$\cos 80=\frac{y}{5} \rightarrow y=5\cdot\cos 80=0{,}868$

$\text{sen}\,65=\frac{x'}{5} \rightarrow x'=5\cdot\text{sen}\,65=4{,}532$

$\cos 65=\frac{y'}{5} \rightarrow y'=5\cdot\cos 65=2{,}113$



La escalera alcanzará alturas de entre 4,53 y 4,92 metros, y deberá situarse a una distancia mínima de 87 centímetros y máxima de 2,11 metros de la pared.

13.

a. $f(x)=\frac{2x-4}{4x^2-13x+3}$

El denominador no puede valer 0, lo cual ocurre si $4x^2-13x+3=0 \rightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{121}}{8} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1/4 \end{cases}$

Por lo tanto, $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1/4\ ,\ 3\}$

b. $g(x)=\sqrt{9-x^2}$

Debe ser $9-x^2\geq 0 \underset{\text{igualdad notable}}{\rightarrow} (3+x)(3-x)\geq 0$

Como $9-x^2=0 \rightarrow 9=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$, averiguamos el signo del resto de los números dando valores en los intervalos de la recta real dividida por el 3 y el – 3:

Intervalos de $\mathbb{R}$	$(-\infty\ ,\ -3)$	$(-3\ ,\ 3)$	$(-3\ ,\ \infty)$
signo de $9-x^2$	$-$	$+$	$-$

Por lo tanto, $Dom(g)=[-3\ ,\ 3]$

14.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+5x-3 & \text{si } x\leq 1 \\ 4 & \text{si } 1<x\leq 3 \\ \dfrac{5x-3}{3} & \text{si } x>3 \end{cases}$$ es una función definida en tres trozos.

Primer trozo: Es un trozo de parábola que termina cuando x=1, siendo el vértice $V_x=-b/2a=-5/4$

$V_y=f(-5/4)=2\cdot(-5/4)^2+5\cdot(-5/4)-3=-49/8$

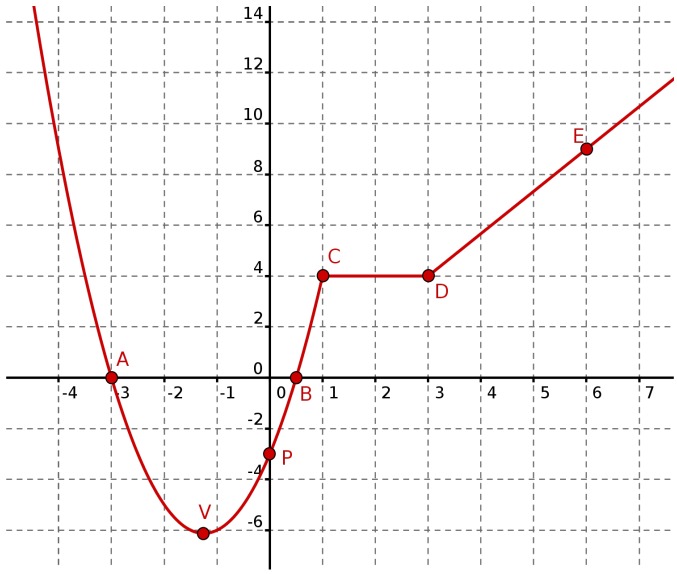
y hallando los puntos de corte con los ejes al igualar una de las coordenadas a 0:

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=2\cdot 0^2+5\cdot 0-3=-3$

Eje X:

$y=0 \rightarrow 2x^2+5x-3=0 \rightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{4} \rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ x=-3 \end{cases}$

x	$y=2x^2+5x-3$	
-5/4	– 49/8	V
0	– 3	P
1/2	0	A
– 3	0	B
1	4	C (final)



Segundo trozo: Es un trozo de recta horizontal a la altura y=4, con $x\in(1\ ,\ 3]$

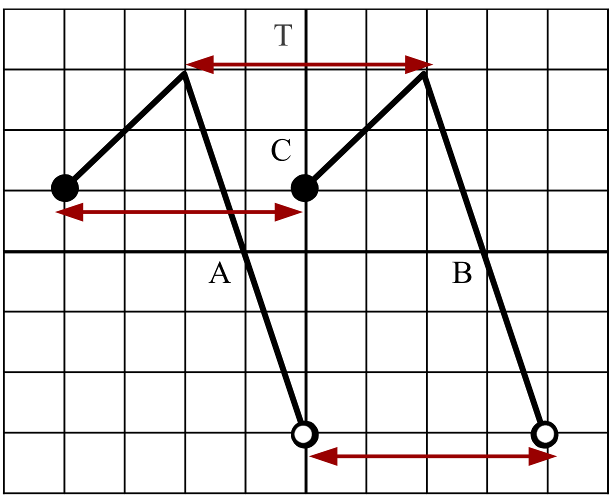
Tercer trozo: Es una semirrecta que comienza después de x=3 y pasa por

x	$y=(5x-3)/3$	
3	4	D
6	9	E

En conclusión:

Es una función continua; corta al eje Y en el punto P=(0,-3), y al eje X en A=(-3,0) y B=(1/2,0). Tiene un mínimo relativo (y absoluto) en V=(-5/4, -49/8) y no tiene máximos.

15.



$Dom=[-4\ ,\ 0)\cup[0\ ,\ 4)=[-4\ ,\ 4)$

$Rec=(-3\ ,\ 3]$

Corta al eje X en A=(-1, 0) y B=(3, 0)

Corta al eje Y en C=(0, 1)

Es continua en $(-4\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ 4)$

Es discontinua en x= –4, x=0, x=4

Crece en $(-4\ ,\ -2)\cup(0\ ,\ 2)$

Decrece en $(-2\ ,\ 0)\cup(2\ ,\ 4)$

Tiene máximos relativos en x= –2 , x=2

Tiene mínimos relativos en x= –4 , x=0

No es simétrica.

Es periódica (T=4) en su dominio.